Lezione

Riccardo Salvati Manni

2020

M una varietà differenziale.

$$\begin{aligned} I : H_k^{\infty}(M, \mathbb{R}) &\rightarrow H_{dR}^k(M)^* \\ c &\mapsto \left\{\omega \mapsto \int_c \omega\right\}. \end{aligned}$$

Ometteremo di scrivere il suffisso ∞ nell'omologia singolare.

Successione di Mayer–Vietoris per la coomologia di de Rham.

$M = U \cup V$. Consideriamo la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}^k(U) \oplus \mathcal{E}^k(V) \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

definita da

$$\alpha(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) \ , \quad \beta(\omega, \varphi) = \omega|_{U\cap V} - \varphi|_{U\cap V} \ .$$

Successione esatta.
α iniettiva e che $ker\beta = Im\alpha$ è ovvio β è suriettiva ??

Si prende una partizione dell'unità $\{\rho_U, \rho_V\}$ relativa al ricoprimento $\{U, V\}$. Sia $\omega \in \mathcal{E}^0(U \cap V)$.

$$\omega_U = \begin{cases} \rho_V \omega, & \text{in} \quad U \cap V \\ 0, & \text{in} \quad U \setminus U \cap V \end{cases}, \qquad \omega_V = \begin{cases} -\rho_U \omega\ , & \text{in} \quad U \cap V \\ 0, & \text{in} \quad V \setminus U \cap V \end{cases} \tag{1}$$

$$\omega = \omega_U|_{U \cap V} - \omega_V|_{U \cap V}$$

e dunque β è suriettiva.

α e β sono omomorfismi di complessi, nel senso che il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & \mathcal{E}^k(U) \oplus \mathcal{E}^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "(d,d)"'] & \mathcal{E}^k(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{k+1}(M) \arrow[r] & \mathcal{E}^{k+1}(U) \oplus \mathcal{E}^{k+1}(V) \arrow[r] & \mathcal{E}^{k+1}(U \cap V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

commuta, per ogni k.
Quindi vi è una successione esatta lunga, detta di Mayer–Vietoris:

$$\cdots \to H^k_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha} H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \xrightarrow{\beta} H^k_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_{dR}(M) \to \dots$$

dove

$$\alpha([\omega]) = ([\omega|_U], [\omega|_V]), \qquad \beta([\omega], [\varphi]) = [\omega|_{U \cap V} - \varphi|_{U \cap V}].$$

Da definire δ.
Data una classe $[\omega] \in H^k_{dR}(U \cap V)$, dove ω è una forma chiusa in $U \cap V$, si definiscono ω_U e ω_V come prima . Consideriamo

$$(d\omega_U, d\omega_V) \in \mathcal{E}^{k+1}(U) \oplus \mathcal{E}^{k+1}(V) \ .$$

$d\omega_{U|_{U\cap V}} - d\omega_{V|_{U\cap V}} = d\omega = 0$, esiste una forma $\varphi \in \mathcal{E}^k(M)$ tale che $\varphi|_U = d\omega_U$ e $\varphi|_V = d\omega_V$. La forma φ è chiusa e si pone:

$$\delta([\omega]) = [\varphi] \ . \tag{2}$$

Lemma

Sia M una varietà differenziale. Siano U e V due aperti in M tali che $U \cup V = M$. Allora vi è un diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_k(U \cap V) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "I"'] & H_k(U) \oplus H_k(V) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "(I,I)"'] & H_k(M) \arrow[r, "\underline{\partial}"] \arrow[d, "I"'] & H_k(U \cap V) \arrow[d, "I"'] \\
{} \arrow[r] & H^k_{dR}(U \cap V)^* \arrow[r, "\beta^*"] & H^k_{dR}(U)^* \oplus H^k_{dR}(V)^* \arrow[r, "\alpha^*"] & H^k_{dR}(M)^* \arrow[r, "\delta^*"] & H^{k-1}(U \cap V)
\end{tikzcd}
$$

dove $a, b, \underline{\partial}$ sono le applicazioni che definiscono la successione di Mayer–Vietoris in omologia, mentre α^*, β^* e δ^* sono le trasposte di α, β e δ.

Dim. Si tratta di considerare i tre quadrati. Si ha

$$\begin{aligned}
\beta^*(I(c))(\omega,\psi) &= I(c)\beta(\omega,\psi) \\
&= I(c)(\omega|_{U\cap V} - \psi|_{U\cap V}) \\
&= \int_c \omega|_{U\cap V} - \psi|_{U\cap V} \\
&= \int_c \omega - \int_c \psi \quad (\text{poiché } c \in Z_k(U\cap V)) \\
&= (I,I)(c,c)(\omega,\psi) \\
&= (I,I)a(c)(\omega,\psi)\ .
\end{aligned}$$

Così via.

Una *varietà di tipo finito* è una varietà M che può ricoprirsi con un numero finito di aperti $U_1, \ldots, U_m$ tali che ogni intersezione $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$, se non vuota, è diffeomorfa a un aperto stellato di $\mathbb{R}^d$, $d = \dim M$.

Il lemma di Poincaré ci dice che se U è un aperto stellato di $\mathbb{R}^d$ allora:

$$H_k(U, \mathbb{R}) \cong H^k_{dR}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \,, & k = 0 \\ 0 \,, & k > 0 \,. \end{cases}$$

M è di tipo finito allora gli $H_k(M, \mathbb{R})$ sono finito–dimensionali.
Procediamo per induzione nel numero degli aperti.
Se vi è un solo aperto, M stesso è stellato e non c'è nulla da dimostrare.
VERO per varietà M che sono unione di $n-1$ aperti a mutua intersezione stellata.

Supponiamo che $M = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ e che $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{I_k}$, se non vuoto, sia stellato. Poniamo

$$U = U_1 \ , \quad V = U_2 \cup \cdots \cup U_n \ ,$$

U, V e $U \cap V$ sono di tipo finito e soddisfano l'ipotesi induttiva, e quindi $H_k(U)$, $H_k(V)$ e $H_k(U \cap V)$ sono finito–dimensionali. Dalla successione di Mayer Vietoris segue che anche $H_k(M)$ è finito–dimensionale.

Esempi di varietà di tipo finito sono le varietà triangolabili compatte in cui si prendono come aperti del ricoprimento le stelle dei vertici della triangolazione. La stella di un vertice v è l'interno dell'unione di tutti i triangoli che hanno v come vertice:

Un esempio di varietà che *non* è di tipo finito è $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. In effetti, se $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ fosse di tipo finito si avrebbe $\dim H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R}) < \infty$,mentre $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \dots)$.

Siamo ora in grado di enunciare il teorema di de Rham.

Theorem

(di de Rham) *Sia M una varietà di tipo finito allora*

$$I : H_k^{\infty}(M, \mathbb{R}) \to H_{dR}^k(M)$$

è un isomorfismo, $\forall\, k \geq 0$.

Dimostrazione. Si procede, come sopra, per induzione sul numero degli aperti di un ricoprimento che rende M di tipo finito. Il caso $n = 1$ si riduce alla Lemma di Poincaré,
Vero per le varietà che sono unione di $n - 1$ aperti a mutua intersezione stellata.
$M = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ e supponiamo che $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$, se non vuoto, sia stellato. Scriviamo $U = U_1$, $V = U_2 \cup \cdots \cup U_n$.
Le ipotesi induttive valgono per U, V e $U \cap V$. A questo punto si conclude guardando il diagramma del lemma (1), usando l'induzione e il Lemma dei cinque.

Orientazione e integrazione sulle varietà orientate

Introduciamo innanzitutto il concetto di orientazione.

Sia M una varietà differenziabile. Si dice che M è orientabile se è possibile introdurre in M un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che, in $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, il determinante dello jacobiano $J_{\alpha\beta}$ di $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ sia positivo. La varietà M si dirà orientata una volta che si è scelto su M un atlante massimale che goda della suddetta proprietà. Le carte di questo atlante si dicono positivamente orientate.

Lemma

Una varietà n-dimensionale M è orientabile se e solo se esiste una forma differenziale $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ tale che $\omega(p) \neq 0, \ \forall p \in M$.

Dim. Supponiamo M orientabile e sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante con $\det(J_{\alpha\beta}) > 0$

Siano $x_1, \dots, x_n$ coordinate in $\mathbb{R}^n$ e scriviamo $x_i^\alpha = x_i \circ \varphi_\alpha$. Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Si definisca

$$\mu = \sum_\alpha \rho_\alpha \, dx_1^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_n^\alpha \ .$$

Per calcolare $\mu(p)$ si supponga $p \in U_\beta$. Allora

$$\mu|_{U_\beta} = \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \det(J_{\alpha\beta}) \right) dx_1^\beta \wedge \cdots \wedge dx_n^\beta \ .$$

Si ha che $(\sum \rho_\alpha \det J_{\alpha\beta}(p) > 0$, e dunque $\mu(p) \neq 0$.

Viceversa data una $\mu \in \mathcal{E}^n(M)$ con $\mu(p) \neq 0$, per ogni $p \in M$, si costruisce un atlante $\{(U, \varphi_\alpha)\}$ includendo in esso solo quelle carte per cui

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right) > 0 \ .$$

Scrivendo μ localmente

$$\mu = f_\alpha \, dx_1^\alpha \wedge \cdots , \wedge dx_n^\alpha \ ,$$

ciò equivale a dire che $f_\alpha > 0$. D'altro canto in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha $f_\alpha = (\det J_{\alpha\beta}) f_\beta$ e dunque $\det(J_{\alpha\beta}) > 0$.

Siano M e N due varietà orientate della stessa dimensione n. Sia μ (risp. ν) una n-forma in M (risp. N) che definisce l'orientazione su M (risp. N). Sia $F : M \to N$ una applicazione C^∞. Si dice che F conserva l'orientazione se $F^*\nu = f\mu$ con $f \in \mathcal{E}^0(M)$ e ovunque positiva.

Come abbiamo già ricordato, se $F : A \to F(A) = B$ è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ allora

$$\int_{F(A)} f = \int_A |\det(J_F)| f \circ F \tag{3}$$

dove J_F è la matrice jacobiana di F.

Ora data una n-forma ω in $\mathbb{R}^n$ vi è un unico modo di scriverla nella forma

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e, per definizione si pone

$$\int_A \omega = \int_A f$$

così, la formula (3) può riscriversi

$$\int_{F(A)} \omega = \pm \int_A F^* \omega \tag{4}$$

dove va preso il segno $+$ se F conserva l'orientazione e il segno $-$ se la inverte.

Vogliamo ora introdurre la nozione di *dominio regolare* in una varietà orientata. Si intende con ciò un aperto connesso $G \subseteq M$ avente la seguente proprietà. Per ogni punto $p \in \partial G$ esiste una carta locale (positivamente orientata)

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

con $\varphi(p) = 0$ e con

$$G \cap U = \varphi^{-1}\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}\,.$$

In particolare gli omeomorfismi

$$\varphi' = \varphi|_{\partial G} : \partial G \cap U \to \varphi(\partial G \cap U) \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

costituiscono un atlante per una struttura differenziabile su ∂G che così diventa una varietà $(n-1)$-dimensionale.
È anche chiaro che se ψ è un'altra carta di M intorno a un punto $p \in \partial G$, del tipo sopra descritto, e se

$$\psi\varphi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$$

allora $F_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$ e $(\partial F_n/\partial x_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$.
Ne segue che la matrice jacobiana di $\psi\varphi^{-1}$ quando ristretta e $x_n = 0$ ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} & & & * \\ & J' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \ldots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Dunque J', che è lo jacobiano di $\psi|_{\partial G}(\varphi|_{\partial G})^{-1}$, ha determinante positivo, e quindi l'atlante che definisce la struttura differenziale su ∂G ne definisce anche una orientazione.
Ebbene, se n è pari prenderemo questa come orientazione del bordo ∂G, se invece n è dispari, prenderemo l'orientazione opposta.

Naturalmente una varietà compatta è un dominio regolare con bordo vuoto.

Vogliamo ora definire l'integrale esteso a una regione regolare $G \subseteq M$, di una n-forma $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ a supporto compatto.

Definiremo *n-simplesso regolare orientato* un diffeomorfismo orientato σ tra un aperto U in $\mathbb{R}^n$ contenente l'n-simplesso standard Δ_n e un aperto $\sigma(U)$ di M.

$$\Delta_n \subset U \xrightarrow{\sigma} \sigma(U) \subseteq M$$

Dato un dominio regolare $G \subseteq M$ considereremo tutti gli n-simplessi regolari orientati σ tali che $\sigma(\Delta_n) \subset G$, oppure tali che $\sigma(\Delta_n) \subset \overline{G}$ e $\sigma(\Delta_n) \cap \partial G = \sigma j_n(\Delta_{n-1})$.

Per ogni simplesso del primo tipo prendiamo gli aperti U contenuti nell'interno di $\sigma(\Delta_n)$.
Per ogni simplesso del secondo tipo prendiamo gli aperti U del tipo $\sigma(V)$, dove V è un piccolo intorno di un punto della n-sima faccia di Δ_n che incontra il bordo di Δ_n solo in quella faccia e tale che $\sigma(V) \subset \sigma(\Delta_n) \cup M \setminus G$

Sia ora $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ una n-forma a supporto compatto. Ricopriamo $\operatorname{supp}(\omega) \cap G$ con un numero finito di aperti $U_1, \ldots, U_h$ del tipo sopra descritto, e poniamo $U_0 = M \setminus \overline{\operatorname{supp}\omega \cap G}$. Per costruzione gli aperti $U_1, \ldots, U_h$ sono associati ad altrettanti simplessi regolari orientati $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$. Sia $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_i\}$. Definiamo

$$\int_G \omega = \sum_{i=1}^{h} \int_{\sigma_i} \rho_i \omega \ . \tag{5}$$

Dimostriamo che questa definizione non dipende dalle scelte fatte. Supponiamo che $V_0, V_1, \ldots, V_k$ sia un altro ricoprimento dello stesso tipo. Siano $\tau_1, \ldots, \tau_k$ i relativi k-simplessi regolari orientati, e sia $\{\lambda_j\}$ una partizione dell'unità associato al ricoprimento $\{V_j\}$. Si ha

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{\sigma_i} \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{h} \int_{\sigma_i} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \int_{\sigma_i} \lambda_j \rho_i \omega$$

In modo simile si ottiene

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_i} \lambda_j \omega = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_j} \lambda_j \rho_i \omega \ .$$

D'altro canto, essendo σ_i e τ_j positivamente orientati, per la (4), si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_i} \lambda_j \rho_i \omega &= \int_{\Delta_n} \sigma_i^*(\lambda_j \rho_i \omega) \\
&= \int_{(\sigma_i^{-1}\tau_j)\Delta_n} \sigma_i^*(\lambda_j \rho_i \omega) \\
&= \int_{\Delta_n} (\sigma_i^{-1}\tau_j)^* \sigma_i^*(\lambda_j \rho_i \omega) \\
&= \int_{\Delta_n} \tau_j^*(\lambda_j \rho_i \omega)
\end{aligned}$$

Dunque la definizione è ben posta. Possiamo ora dimostrare la seconda versione del teorema di Stokes

Theorem

(di Stokes, seconda versione)*Sia M una varietà differenziale orientata di dimensione n. Sia $G \subseteq M$ una regione regolare. Sia $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ a supporto compatto. Allora*

$$\int_G d\omega = \int_{\partial D} \omega \ .$$

Dim. Siano $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k \ , \ \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ scelti come nella formula precedente Si osservi che, per costruzione, $\rho_0 \equiv 0$ in un intorno di $\operatorname{supp} \omega \cap G$ e dunque $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$ in un intorno di $\operatorname{supp} \omega \cap G$. In un tale intorno si ha

$$d\omega = \sum_{i=1}^{k} d(\rho_i \omega).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_G d\omega &= \sum_{i=1}^{k} \int_G d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_i} d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial \sigma_i} \rho_i \omega \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Supponiamo ora che σ_i sia un simplesso tale che $\sigma_i(\Delta_n) \subset G$, poiché $\operatorname{supp}(\rho_i \omega) \subset \operatorname{Int}(\sigma_i(\Delta_n))$ si ottiene

$$\int_{\partial \sigma_i} \rho_i \omega = 0 \ . \tag{7}$$

Supponiamo ora che σ_i sia del secondo tipo e che cioè $\sigma_i j_n(\Delta_n) \subset \partial G$. Si osservi che, per come si è deciso di orientare ∂G, se n è pari $\sigma_i j_n$ conserva l'orientazione mentre la inverte se n è dispari.
Dunque

$$\int_{\partial\sigma_i} \rho_i\omega = (-1)^n \int_{j_n\sigma_i} \rho_i\omega = (-1)^{2n} \int_{\partial G} \rho_i\omega = \int_{\partial G} \rho_i\omega \ .$$

Questa relazione e i risultati precedenti concludono la dimostrazione del teorema di Stokes.
Sia M una varietà orientata compatta di dimensione n. Sia $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$. Allora

$$\int_M d\omega = 0 \ .$$

Infatti M è una regione regolare con bordo vuoto.